.Lamyae.

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية

ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵏ ⵜⵎⵓⵙⵏⵉⵡⵉⵏ ⵜⵉⵙⵏⵙⵉⵏ

Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès

Année universitaire : 2019 – 2020

Module : Analyse II

$1^{ère}$ *Année CP*

TD N° : 1

Exercice 1 :

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in Q \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus Q \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 2 :

Calculer la limite des suites suivantes :

1)– $u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$.

2)– $u_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

3)– $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

4)– $u_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}$

5)– $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$

Exercice 3 :

Calculer les intégrales suivants :

(a) $\int \ln t\,dt$, (b) $\int_1^2 t\ln t\,dt$, (c) $\int_0^1 te^t\,dt$, (d) $\int_0^1 \arctan(t)\,dt$,

(e) $\int \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$, (f) $\int_1^e t^2\ln(t)\,dt$, (g) $\int_0^1 t(\arctan t)^2\,dt$, (h) $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$,

(i) $\int_1^e \frac{(\ln(t))^n}{t}\,dt$.

Exercice 4 :

1)– Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$$

2)– En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$.

Exercice 5 :

Calculer :

$$1)\ I = \int \frac{1}{1-x^2} dx,\quad 2)\ J = \int \frac{1}{x^3 - x^2} dx,\quad 3)\ K = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx.$$

Exercice 6 :

Soit $f(x) = \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$.

1)– Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2)– En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 7 :

Calculer les intégrales suivants :

$$1)\ A = \int \cos(x) \sin^2(x) dx,\quad 2)\ B = \int \cos^4(x) \sin^3(x) dx,\quad 3)\ C = \int \cos^2(x) \sin^2(x) dx.$$

Exercice 8 : (Intégrales de Wallis)

Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx \quad$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1)– Donner une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2)– Calculer I_0, I_1 et I_2.

3)– Montrer que le produit $(n+1) I_n I_{n+1}$ est constant.

4)– Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} I_n$.

5)– Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire la formule suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} 2(2n+1) \left[\frac{2n(2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 1} \right]^2 = \pi$$

Exercice 9 : (inégalité de Young)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1)– Pour tout $x > 0$, Montrer que :

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x).$$

2)– En déduire que :

$$\forall a, b > 0, \qquad \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f'(t)dt \geqslant ab,$$

et que l'égalité se produit si et seulement si $b = f(a)$.

Exercice 10 :

1)– Calculer $\int x^k \ln x dx$ où $k \in \mathbb{N}$.

2)– En déduire $\int \ln x dx$.

Exercice 11 :

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $u_n = \int_0^a t^n \sin(nt)dt$. Quelle est la limite de la suite $(n^2 u_n)$?

Indication : Utiliser la majoration suivante $\left|\int_0^a t^n \sin(nt)dt\right| \leqslant \int_0^a |t^n \sin(nt)|\, dt$

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} dt$

1)– Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle paire, impaire ?

2)– Etudier les variations de f, puis l'existence de limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Exercice 13 : (Méthode des trapèzes)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $I = \int_a^b f(t)dt$ et on note $M_2 = \max\{|f''(x)| ; \quad x \in [a, b]\}$.

1)– Montrer que $I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} + \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)dt$.

2)– Montrer que $\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} dt = \frac{(b-a)^3}{12}$.

3)– On fixe $n \geqslant 1$, et on pose $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On note I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles.

(a) Exprimer I_n en fonction des a_k.

(b) Démontrer que :

$$|I - I_n| \leqslant \frac{M_2(b-a)}{12n^2}.$$

Exe
Exe
Exe

Exercice 14 :

Pour $n \geqslant 0$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

1)– Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.

2)– Pour $n \geqslant 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

3)– En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 15 :

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1)– $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$.

2)– $u_n = \int_0^n \frac{1}{1+e^{nt}}\,dt$.

Exercice 16 :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

(1) $\int \frac{1}{\sin x}dx$, (2) $\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$, (3) $\int \sin^8(x)\cos^3(x)dx$, (4) $\int x \arctan x\,dx$,

(5) $\int \cos^{1234}(x)\sin(x)dx$, (6) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$, (7) $\int \frac{1}{3+e^{-x}}dx$, (8) $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}dx$

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية

ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⵜⵓⵙⵏⴰⵡⵉⵏ

Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès

Année universitaire : 2019 – 2020

Module : Analyse II

$1^{ère}$ *Année CP*

TD N° : 2

A refaire

Exercice 1 :

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, 2) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}$, 3) $K = \int_1^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt$, 4) $L = \int_1^{+\infty} \frac{t^5+3t+1}{t^3+4} e^{-t} dt$.

Exercice 2 :

Etudier par un calcul direct, la nature de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$$

Exercice 3 :

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$, (b) $\int_0^1 \frac{\log x}{x-1} dx$, (c) $\int_2^{+\infty} \sqrt{x^2+3x} \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \sin^2\left(\frac{1}{\ln x}\right) dx$.

Exercice 4 :

1)– Etudier, suivant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$$

2)– Préciser, suivant les valeurs de p, la nature de l'intégrale suivante suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{t+1} dt$$

3)– Etudier l'existence de l'intégrale suivante en fonction de α.

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha} \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) dt$$

X **4)–** Etudier, selon α et β, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t} dt.$$

Exercice 5 :

Préciser la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1)\ I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)},\quad 2)\ J = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx.$$

Exercice 6 :

Vérifier la convergence, puis calculer :

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx,\quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$

Exercice 7 :

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

1)– Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, I_n existe-t-il ?.

2)– Etablir une relation de récurrence entre les I_n.

3)– Calculer I_n.

Exercice 8 :

Soit $p \in \mathbb{N}$,

1)– Montrer que la fonction $x \to (\log(x))^p$ est intégrable sur $]0, 1]$.

2)– Calculer $I_p = \displaystyle\int_0^1 (\log(x))^p\, dx$ en faisant le changement de variable $t = \log(x)$.

Exercice 9 : (Fonction Gamma)

Soit $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$,

1)– Etudier la nature de $\Gamma(\alpha)$ selon la valeur du parmètre α.

2)– Déterminer $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 :

Soient $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ et $J_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx$.

1)– Etudier la nature de I_α et J_α suivant la valeur du paramètre α.

2)– Déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

3)– Même question pour : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1} dx$.